

Transformações Geométricas 3D – Parte 2

Pedro Ximenes

Universidade Católica de Pernambuco (UNICAP)

2026.2

Sumário

- 1 Revisão e motivação
- 2 Rotação em torno de eixo paralelo
- 3 Rotação em torno de eixo arbitrário
- 4 Exemplo numérico completo
- 5 Composição de transformações 3D
- 6 Reflexão 3D
- 7 Cisalhamento 3D
- 8 Fechamento
- 9 Aula interativa

Revisão da Parte 1

O que foi visto na aula anterior

Na Parte 1 estudamos as transformações geométricas 3D básicas com eixo de rotação **coincidindo com um dos eixos cartesianos**:

- **Translação 3D**: mover um objeto somando deslocamentos (t_x, t_y, t_z)
- **Escala 3D**: redimensionar com fatores (s_x, s_y, s_z) , com ou sem ponto fixo
- **Rotação 3D – caso básico**: eixo de rotação é um dos eixos x , y ou z

O que falta

E quando o eixo de rotação **não** passa pela origem? E quando ele é **paralelo**, mas não coincide, com um eixo cartesiano? E quando é **arbitrário**?

Revisão: Fórmulas de Rotação Básica (R_x , R_y , R_z)

Eixo x fixo ($x' = x$)

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y' = y c - z s$$

$$z' = y s + z c$$

Eixo y fixo ($y' = y$)

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} c & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = x c + z s$$

$$z' = -x s + z c$$

Eixo z fixo ($z' = z$)

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = x c - y s$$

$$y' = x s + y c$$

Notação ($c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$) e regra prática

O eixo de rotação mantém sua linha e coluna inalteradas (1 na diagonal). As outras duas coordenadas giram no plano perpendicular.

Atenção ao sinal em R_y

Em R_y , o termo positivo $+s$ fica na 1ª linha e o negativo $-s$ na 3ª. Isso respeita a regra da mão direita no sistema dextrógiro ($z \times x = y$).

Agenda da aula de hoje

- 1 Revisão das rotações básicas (R_x , R_y , R_z)
- 2 Rotação em torno de eixo **paralelo** a um cartesiano
- 3 Rotação em torno de eixo **arbitrário**
- 4 Exemplo numérico completo (cubo rotacionado por aresta)
- 5 Composição de transformações 3D (ordem e exemplo em Three.js)
- 6 **Reflexão 3D**
- 7 **Cisalhamento 3D**
- 8 Aula interativa (perguntas e respostas conceituais e numéricas)

Fio condutor

Todas essas transformações são representadas por matrizes 4×4 . A composição é sempre uma multiplicação de matrizes — exatamente como no caso 2D.

Eixo de rotação paralelo a um eixo cartesiano

Problema

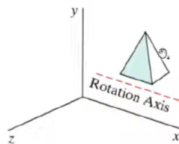
O eixo de rotação **não** coincide com x , y ou z , mas é **paralelo** a um deles. Ou seja, ele aponta na mesma direção, porém passa por um ponto diferente da origem.

- Não podemos usar diretamente R_x , R_y ou R_z
- É preciso **mover** o eixo de rotação até o eixo cartesiano equivalente, rotar, e depois **desfazer** o movimento

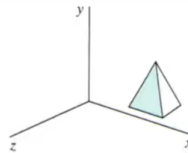
Regra dos três passos

- 1 **Transladar** o objeto de forma que o eixo de rotação coincida com o eixo cartesiano paralelo
- 2 **Rotacionar** em torno desse eixo cartesiano pelo ângulo desejado
- 3 **Transladar de volta** o eixo de rotação para a posição original

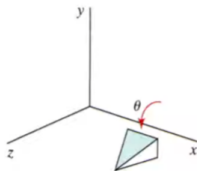
Visualização dos três passos



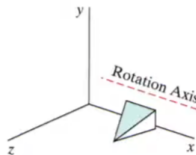
(a) Posição Original do Objeto



(b) Translade o eixo de rotação para coincidir com o eixo x

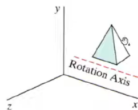


(c) Rotacione objeto usando o ângulo θ

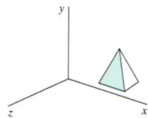


(d) Translade o eixo de rotação para a sua posição original

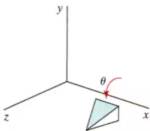
Visualização dos três passos



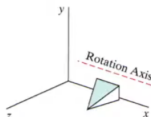
(a) Posição Original do Objeto



(b) Translade o eixo de rotação para coincidir com o eixo x



(c) Rotacione objeto usando o ângulo θ



(d) Translade o eixo de rotação para a sua posição original

- No **passo 1** o objeto e o eixo de rotação descem juntos até o eixo cartesiano
- No **passo 2** aplica-se a rotação em torno do eixo cartesiano (aqui x)
- No **passo 3** o eixo de rotação é devolvido à posição original, arrastando o objeto já rotacionado

Ponto-chave

O objeto e o eixo de rotação se movem **juntos** na translação. Apenas na etapa do meio a rotação de fato acontece.

Matriz composta para eixo paralelo a x

Seja o eixo de rotação paralelo a x e passando pelo ponto $(0, t_y, t_z)$.

Sequência de matrizes

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(0, t_y, t_z) \mathbf{R}_x(\theta) \mathbf{T}(0, -t_y, -t_z)$$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{M} \mathbf{P}$$

- $\mathbf{T}(0, -t_y, -t_z)$ — **primeiro** passo: leva o eixo para coincide com x
- $\mathbf{R}_x(\theta)$ — **segundo** passo: rotação em torno de x com ângulo θ
- $\mathbf{T}(0, t_y, t_z)$ — **terceiro** passo: devolve o eixo à posição original

Lembrete de leitura

Lemos da **direita para a esquerda**: a última matriz escrita é a primeira a ser aplicada.

Generalizando para outros eixos paralelos

O mesmo raciocínio se aplica quando o eixo de rotação é paralelo a y ou a z :

Eixo paralelo a y , passando por $(t_x, 0, t_z)$

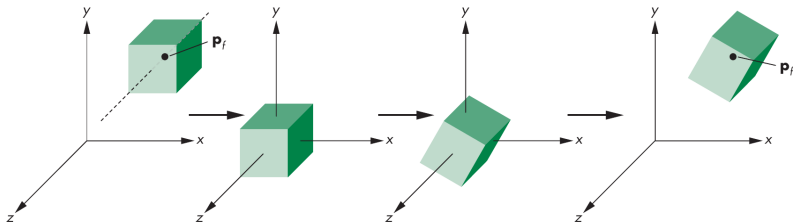
$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(t_x, 0, t_z) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{T}(-t_x, 0, -t_z)$$

Eixo paralelo a z , passando por $(t_x, t_y, 0)$

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(t_x, t_y, 0) \mathbf{R}_z(\theta) \mathbf{T}(-t_x, -t_y, 0)$$

- Sempre três passos: transladar, rotar, transladar de volta
- A rotação usada ($\mathbf{R}_x$, $\mathbf{R}_y$ ou $\mathbf{R}_z$) depende de qual eixo cartesiano é **paralelo** ao eixo de rotação

Visualização: Sequência de Rotação com Ponto Fixo



Sequência Composta (3 passos)

$$M = T(p_f) R(\theta) T(-p_f)$$

- **1. Alinhamento:** translada p_f para a origem ($T(-p_f)$)
- **2. Rotação:** gira em torno do eixo cartesiano na origem (R)
- **3. Restauração:** translada de volta à posição original ($T(p_f)$)

Por que essa sequência é indispensável?

As matrizes básicas R_x , R_y , R_z operam **estritamente sobre eixos que passam pela origem** $(0, 0, 0)$. Para girar em torno de qualquer outro ponto p_f , a translação de ida e volta é obrigatória.

Eixo de rotação totalmente arbitrário

Definição

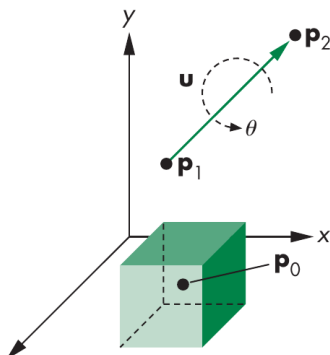
Um eixo de rotação **arbitrário** não é paralelo a nenhum eixo cartesiano. Ele pode apontar em qualquer direção e passar por qualquer ponto do espaço.

- É o caso mais geral e mais complexo
- Requer uma sequência de **rotações e translações** para alinhar o eixo com um eixo cartesiano antes de rotar
- Tipicamente envolve **7 transformações** encadeadas

Não entraremos nos detalhes aqui

Esse caso fica como material de aprofundamento (ver apêndice da seção 6 do livro-texto). O importante é saber que ele **existe** e que a estratégia é a mesma: alinhar, rotar, desalinhar.

Estratégia geral para eixo arbitrário



Passos fundamentais:

- 1 **Transladar:** levar o ponto base p_1 do eixo para a origem ($T(-p_1)$)
- 2 **Alinhar:** aplicar rotações em torno de x e y para fazer o vetor diretor $\vec{u}$ coincidir com o eixo z
- 3 **Rotacionar:** aplicar a rotação desejada $R_z(\theta)$ em torno de z
- 4 **Desfazer alinhamento:** aplicar as inversas das rotações em ordem inversa
- 5 **Desfazer translação:** transladar de volta ($T(p_1)$)

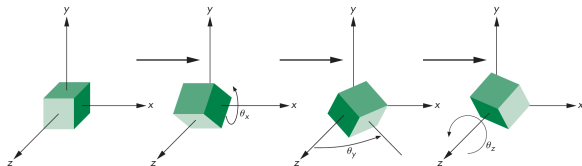
Princípio

O problema complexo de girar no espaço 3D arbitrário é reduzido a rotações conhecidas sobre eixos cartesianos!

Eixo Arbitrário: Decomposição das Rotações

Matriz Composta (7 matrizes encadeadas)

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(P_0) \mathbf{R}_x(-\theta_x) \mathbf{R}_y(-\theta_y) \mathbf{R}_z(\theta) \mathbf{R}_y(\theta_y) \mathbf{R}_x(\theta_x) \mathbf{T}(-P_0)$$



- 1 $\mathbf{T}(-P_0)$: translada ponto base para a origem
- 2 $\mathbf{R}_x(\theta_x)$: rebate o vetor no plano xz
- 3 $\mathbf{R}_y(\theta_y)$: alinha o vetor com o eixo z
- 4 $\mathbf{R}_z(\theta)$: **rotação desejada pelo ângulo θ**
- 5 $\mathbf{R}_y(-\theta_y) \cdot \mathbf{R}_x(-\theta_x)$: desfaz alinhamentos
- 6 $\mathbf{T}(P_0)$: devolve o objeto à posição original

Estrutura Simétrica

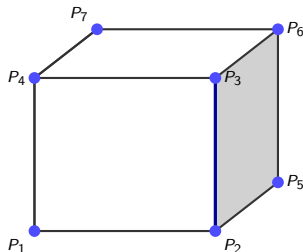
As rotações inversas desfazem o alinhamento na ordem estritamente inversa.

Enunciado do problema

Dados

Um cubo com vértices P_1 a P_8 . Os vértices visíveis são:

Vértice	x	y	z
P_1	4	-1	2
P_2	6	-1	2
P_3	6	1	2
P_4	4	1	2
P_5	6	-1	0
P_6	6	1	0
P_7	4	1	0



Tarefa

Calcule a matriz composta para rotar **90° anti-horário** em torno do eixo formado pela aresta P_3P_2 . Depois, encontre as coordenadas de P_6 após a transformação.

Identificando o eixo de rotação

Coordenadas dos pontos que definem o eixo:

$$P_2 = (6, -1, 2) \quad P_3 = (6, 1, 2)$$

Análise

- P_2 e P_3 têm **mesma** coordenada $x = 6$ e **mesma** $z = 2$
- Diferem apenas em y : um vale -1 e outro $+1$
- Portanto a aresta P_3P_2 é **paralela ao eixo y**

Consequência

Usaremos $\mathbf{R}_y(\theta)$. Para levar o eixo a coincidir com y , precisamos anular as componentes x e z da posição do eixo:

$$\text{Translação necessária: } t_x = -6, \quad t_y = 0, \quad t_z = -2$$

Valores trigonométricos e matriz de rotação

Para $\theta = 90^\circ$:

$$\cos 90^\circ = 0 \quad \sin 90^\circ = 1$$

$$\mathbf{R}_y(90^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz composta

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(6, 0, 2) \mathbf{R}_y(90^\circ) \mathbf{T}(-6, 0, -2)$$

- $\mathbf{T}(-6, 0, -2)$ — leva o eixo de rotação para coincidir com y
- $\mathbf{R}_y(90^\circ)$ — rotação de 90° em torno de y
- $\mathbf{T}(6, 0, 2)$ — devolve o eixo à posição original

Calculando a matriz composta – Passo 1

Multiplicando as duas primeiras matrizes à direita:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_y(90^\circ) \cdot \mathbf{T}(-6, 0, -2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lembrete

Multiplicação linha por coluna, posição a posição. Por exemplo, o elemento (1,4) é $0 \cdot (-6) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = -2$.

Calculando a matriz composta – Passo 2

Agora multiplicamos $\mathbf{T}(6, 0, 2)$ pelo resultado anterior:

$$\mathbf{T}(6, 0, 2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta é a matriz de transformação composta

Ela realiza a rotação de 90° em torno da aresta P_3P_2 em um único passo.

Aplicando ao ponto P_6

$P_6 = (6, 1, 0, 1)$:

$$\mathbf{M} \cdot P_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 6 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \\ 0 \cdot 6 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 6 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 8 \cdot 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resultado

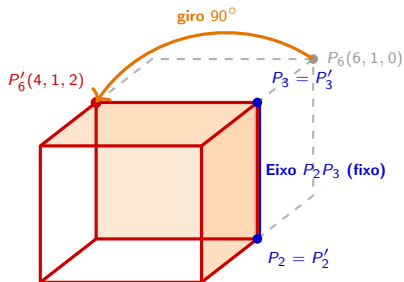
$P'_6 = (4, 1, 2)$.

O ponto que estava em $(6, 1, 0)$ foi rotacionado 90° em torno da aresta P_3P_2 e chegou em $(4, 1, 2)$.

Generalização

Para rotacionar o cubo inteiro, basta aplicar essa mesma **M** a **todos** os vértices.

Resultado da Rotação: Cubo Rotacionado 90°



O que a visualização confirma:

- A aresta P_2P_3 **permaneceu fixa**, pois é o próprio eixo de rotação
- $P_6(6, 1, 0)$ girou 90° e aterrissou exatamente na posição $P'_6(4, 1, 2)$ (onde antes estava P_4)
- A face traseira $P_5P_6P_3P_2$ deitou-se na frente ($z = 2$)

Consistência geométrica

A distância de P_6 ao eixo P_2P_3 era de 2 unidades ao longo de z . Após a rotação de 90° , essa distância de 2 unidades projeta-se inteiramente ao longo de x !

Composição: o mesmo princípio do 2D

Ideia fundamental

Assim como nas transformações 2D, as transformações 3D em coordenadas homogêneas são **todas** representadas por multiplicação de matrizes 4×4 .

- Composições são obtidas **multiplicando** as matrizes na ordem correta
- A transformação mais à **direita** é aplicada **primeiro**
- O resultado final é uma única matriz **M** aplicada ao ponto

Exemplo

$$P' = T R S P$$

Ordem: **escala** $\rightarrow$ **rotação** $\rightarrow$ **translação**. A ordem **importa**: a multiplicação não é comutativa.

Exemplo numérico – composição

Aplicar ao ponto $P = (2, 1, 0, 1)$:

- 1 Escala $S(2, 2, 1)$
- 2 Translação $T(1, 0, 3)$

$$M = T(1, 0, 3) \cdot S(2, 2, 1)$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Aplicando a P :

$$M \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 \cdot 1 \\ 0 + 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resultado

$$P' = (5, 2, 3)$$

Primeiro escala dobrou x e y , depois translação deslocou em x e z .

Exemplo conceitual em three.js: Composição e Pivô

```
1 // 1. Grupo de pivô no ponto P(tx, ty, tz) por onde passa o eixo
2 const pivot = new THREE.Group();
3 pivot.position.set(2, 1, 0); // T(P)
4 scene.add(pivot);
5
6 // 2. Posicionar objeto em relação ao pivô: T(-P)
7 cube.position.set(-2, -1, 0);
8 pivot.add(cube);
9
10 // 3. Rotacionar o pivô: equivale a  $M = T(P) \cdot R \cdot T(-P)$ 
11 pivot.rotation.z = THREE.MathUtils.degToRad(90);
```

- A hierarquia pai-filho implementa $M = T(P) R T(-P)$ sem alterar vértices brutos.
- Permite rotacionar em torno de qualquer ponto de articulação ou aresta.
- A ordem nativa das matrizes de nó em Three.js é $T \cdot R \cdot S$ (*TRS*).

Conclusão prática

Para alterar o centro de rotação de um objeto, basta aninhá-lo dentro de um Group deslocado.

Reflexão 3D – conceito

Definição

A reflexão 3D é uma transformação que **espelha** um objeto em relação a um plano. Pode ser vista como uma rotação de 180° em torno do eixo perpendicular ao plano de reflexão.

- **Reflexão em relação ao plano yz :** nega a coordenada x
- **Reflexão em relação ao plano xz :** nega a coordenada y
- **Reflexão em relação ao plano xy :** nega a coordenada z

Conexão com escala

Uma reflexão é equivalente a aplicar um fator de escala -1 na direção perpendicular ao plano de reflexão. Por isso **nunca** use valores negativos na escala sem querer esse efeito!

Matrizes de reflexão 3D

Reflexão em relação ao plano yz (nega x)

$$\mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x' = -x, \quad y' = y, \quad z' = z$$

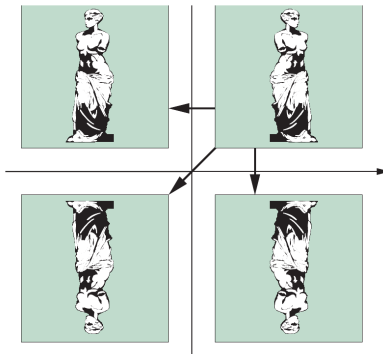
Reflexão em relação ao plano xz (nega y)

$$\mathbf{F}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x' = x, \quad y' = -y, \quad z' = z$$

Reflexão em relação ao plano xy (nega z)

$$\mathbf{F}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x' = x, \quad y' = y, \quad z' = -z$$

Visualização da reflexão



- O modelo no primeiro quadrante ($x > 0, y > 0$) é refletido em relação aos planos cartesianos
- F_x ($x \rightarrow -x$): espelha horizontalmente em relação ao plano yz
- F_y ($y \rightarrow -y$): espelha verticalmente em relação ao plano xz
- A reflexão inverte a orientação intrínseca do objeto (transforma mão direita em mão esquerda)

Cuidado prático em Three.js

Escalas com valores negativos (ex: `scale.x = -1`) realizam exatamente uma reflexão. Em malhas 3D, isso inverte os vetores normais das faces!

Exemplo numérico – Reflexão

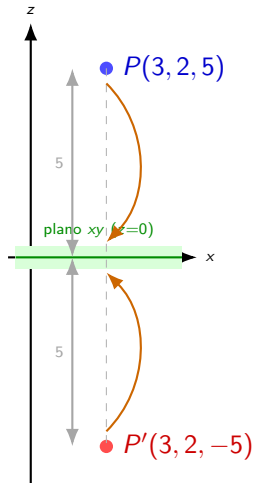
Aplicar reflexão em relação ao plano xy (F_z) ao ponto $P = (3, 2, 5, 1)$:

$$F_z \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resultado

$$P' = (3, 2, -5)$$

Somente z mudou de sinal. x e y ficaram intactos.



Cisalhamento 3D – o que é?

Intuição

Imagine uma pilha de folhas de papel. Se você **empurrar o topo** para o lado enquanto segura a base, as folhas intermediárias vão se deslocar proporcionalmente à sua altura. Isso é um cisalhamento.

- Em 3D, o cisalhamento distorce um cubo em um **paralelepípedo**
- A face de referência não se move; a face oposta se translada
- Cada ponto se desloca proporcionalmente à sua coordenada no eixo de referência

Aplicação prática

Usado para criar efeitos de inclinação em objetos, como letras em *itálico* ou sombras projetadas em perspectiva.

Cisalhamento em relação ao eixo z (H_{xy})

O eixo z é o eixo de **referência**. As coordenadas x e y recebem uma parcela de z :

$$x' = x + sh_{xz} z \quad y' = y + sh_{yz} z \quad z' = z$$

$$H_{xy}(sh_{xz}, sh_{yz}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & sh_{xz} & 0 \\ 0 & 1 & sh_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- sh_{xz} e sh_{yz} são os **fatores de cisalhamento**
- Eles ficam na **terceira coluna** (coluna do eixo z)
- A face no plano $z = 0$ **não se move**; a face em $z = 1$ se desloca por (sh_{xz}, sh_{yz})

Cisalhamento em relação ao eixo y (H_{xz})

O eixo y é o eixo de referência. As coordenadas x e z recebem uma parcela de y :

$$x' = x + sh_{xy} y \quad y' = y \quad z' = z + sh_{zy} y$$

$$H_{xz}(sh_{xy}, sh_{zy}) = \begin{pmatrix} 1 & sh_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & sh_{zy} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Os fatores ficam na **segunda coluna** (coluna de y)
- A coordenada y permanece inalterada

Cisalhamento em relação ao eixo x (H_{yz})

O eixo x é o eixo de referência. As coordenadas y e z recebem uma parcela de x :

$$x' = x \quad y' = y + sh_{yx} x \quad z' = z + sh_{zx} x$$

$$H_{yz}(sh_{yx}, sh_{zx}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ sh_{yx} & 1 & 0 & 0 \\ sh_{zx} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Os fatores ficam na **primeira coluna** (coluna de x)
- A coordenada x permanece inalterada

Resumo: onde ficam os fatores de cisalhamento

Regra prática

Os fatores de cisalhamento ficam na **coluna do eixo de referência** (o eixo que “puxa” os outros).

Eixo de referência	Coluna afetada	Coordenada fixa
z	3ª coluna	$z' = z$
y	2ª coluna	$y' = y$
x	1ª coluna	$x' = x$

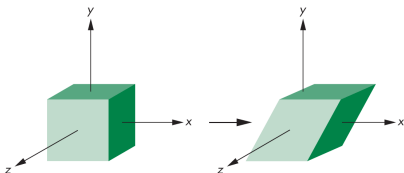
Exemplo numérico rápido

Aplicar $H_{xy}(0.5, 0.3)$ ao ponto $P = (1, 2, 4, 1)$:

$$x' = 1 + 0.5 \cdot 4 = 3, \quad y' = 2 + 0.3 \cdot 4 = 3.2, \quad z' = 4$$

$$P' = (3, 3.2, 4)$$

Visualização do cisalhamento 3D



Comportamento Espacial

- A **face base** (no plano de referência) permanece imóvel
- As seções transversais deslizam **proporcionalmente à distância** até a face base
- Faces ortogonais transformam-se em **paralelogramos**
- O **volume** do sólido é estritamente preservado ($\det(H) = 1$)

Analogia

Como um baralho ou bloco de notas apoiado na mesa: ao empurrar o topo lateralmente, a base fica fixa e as folhas superiores deslizam progressivamente.

Resumo da aula

- Rotação com eixo **paralelo** a um cartesiano: 3 passos — transladar, rotar, transladar de volta
- Rotação com eixo **arbitrário**: estratégia similar, porém com mais rotações de alinhamento
- Composição 3D: mesma lógica do 2D, matrizes 4×4 , ordem importa
- **Reflexão**: negar uma coordenada $\equiv$ escala com fator -1
- **Cisalhamento**: distorce proporcionalmente a uma coordenada de referência

Próxima etapa

Na continuidade estudaremos as transformações entre **sistemas de coordenadas 3D** e como programar essas transformações em WebGL / Three.js.

Aula interativa

Perguntas e respostas

Pergunta 1

Pense!

Quando o eixo de rotação é **paralelo** a um eixo cartesiano, quais são os três passos necessários para realizar a rotação?

Discuta com a turma por um minuto.

Resposta 1

Resposta

- 1 **Transladar** o objeto de forma que o eixo de rotação coincida com o eixo cartesiano paralelo.
- 2 **Rotacionar** em torno do eixo cartesiano com o ângulo desejado.
- 3 **Transladar de volta** o eixo para a sua posição original.

Pergunta 2

Pense!

Seja o eixo de rotação paralelo ao eixo z e passando pelo ponto $(2, 3, 0)$. Qual é a matriz composta $\mathbf{M}$ para uma rotação de ângulo θ ?

Resposta 2

Resposta

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(2, 3, 0) \mathbf{R}_z(\theta) \mathbf{T}(-2, -3, 0)$$

Primeiro translada o eixo para coincidir com z , depois rotaciona, depois devolve o eixo à posição original. Como o eixo já tem $z = 0$, a componente z da translação é zero.

Pergunta 3

Pense!

Qual é a diferença entre uma reflexão em relação ao plano yz e uma reflexão em relação ao plano xz ?

Resposta 3

Resposta

- **Plano** yz : nega a coordenada x ($x' = -x$). A matriz $\mathbf{F}_x$ tem -1 na posição $(1, 1)$.
- **Plano** xz : nega a coordenada y ($y' = -y$). A matriz $\mathbf{F}_y$ tem -1 na posição $(2, 2)$.

Em ambos os casos, as outras duas coordenadas ficam inalteradas.

Pergunta 4

Pense!

Aplicando $H_{xy}(0.5, 0)$ ao ponto $P = (2, 1, 4, 1)$, qual é P' ?

Use as equações do cisalhamento em relação ao eixo z .

Resposta 4

Resposta

$$x' = 2 + 0.5 \cdot 4 = 4, \quad y' = 1 + 0 \cdot 4 = 1, \quad z' = 4$$

$$P' = (4, 1, 4)$$

Somente x foi deslocado (por metade do valor de z). y e z ficaram intactos.

Pergunta 5

Pense!

Por que um valor de escala **negativo** produz uma reflexão? Em qual direção ocorre a reflexão se usarmos $\mathbf{S}(-1, 1, 1)$?

Resposta 5

Resposta

Porque a escala multiplica cada coordenada pelo seu fator. Fator -1 em x equivale a negar x , que é exatamente o que a reflexão faz. $\mathbf{S}(-1, 1, 1)$ é idêntica a $\mathbf{F}_x$: reflexão em relação ao plano yz .

Pergunta 6

Pense!

Para rotar um objeto em torno de um eixo **arbitrário** (não paralelo a nenhum eixo cartesiano), qual é a estratégia geral?

Resposta 6

Resposta

- 1 Transladar o eixo arbitrário para que passe pela origem.
- 2 Aplicar rotações para alinhar o eixo com um dos eixos cartesianos (geralmente z).
- 3 Executar a rotação desejada em torno desse eixo cartesiano.
- 4 Desfazer as rotações de alinhamento.
- 5 Desfazer a translação inicial.

Isso envolve tipicamente 7 transformações encadeadas.

Pergunta 7 – Numérica

Pense!

Aplique $\mathbf{F}_y$ (reflexão em relação ao plano xz) ao ponto $P = (3, -2, 5, 1)$. Qual é P' ?

Resposta 7

Resposta

$$\mathbf{F}_y \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$P' = (3, 2, 5)$. Apenas y mudou de sinal (de -2 para $+2$).

Pergunta 8 – Numérica

Pense!

Calcule P' após aplicar $H_{yz}(2, 0)$ ao ponto $P = (3, 1, 0, 1)$.
(Cisalhamento em relação ao eixo x , com $sh_{yx} = 2$ e $sh_{zx} = 0$.)

Resposta 8

Resposta

$$x' = 3, \quad y' = 1 + 2 \cdot 3 = 7, \quad z' = 0 + 0 \cdot 3 = 0$$

$$P' = (3, 7, 0)$$

x ficou fixo; y aumentou proporcionalmente a x . Esse cisalhamento “empurra” o eixo y na direção de x .