

Transformações Geométricas 3D – Parte 1

Pedro Ximenes

Universidade Católica de Pernambuco (UNICAP)

2026

Sumário

- 1 Introdução e motivação
 - Do 2D para o 3D
- 2 Translação 3D
 - Definição e matriz
- 3 Escala 3D
 - Uniforme e não uniforme
- 4 Rotação 3D
 - Eixos de rotação
 - Rotações em torno de z, x e y
- 5 Fechamento
- 6 Aula interativa

Onde paramos e para onde vamos

Conexão com a aula anterior

Em 2D já estudamos translação, escala, rotação e composição de matrizes. Agora vamos estender a mesma ideia para objetos com profundidade.

- Em 3D cada ponto passa a ter coordenadas (x, y, z)
- O eixo z nos dá a noção de profundidade
- As transformações básicas continuam sendo **translação**, **escala** e **rotação**
- A grande diferença está na representação matricial e no fato de que a rotação agora acontece em torno de um **eixo**

Escopo de hoje

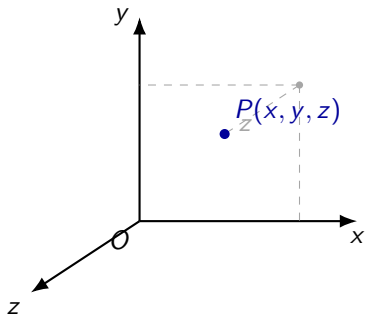
Vamos focar nas transformações básicas 3D, com ênfase em translação, escala e rotações em torno dos eixos cartesianos.

O que muda ao sair do plano?

- Em 2D um ponto era representado por duas coordenadas espaciais
- Em 3D passamos a trabalhar com **três direções independentes**: x , y e z
- O objeto continua sendo descrito por um conjunto de vértices
- A mesma matriz deve ser aplicada a **todos os vértices** do objeto para movê-lo como um todo

Ideia central

Transformar um objeto 3D significa transformar cada vértice usando a mesma regra matemática.



Coordenadas homogêneas em 3D

Representação de pontos e vetores

Em 3D usamos vetores coluna de quatro elementos:

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

- A última coordenada vale **1** para pontos
- A última coordenada vale **0** para vetores

Matrizes 4x4 e ordem das operações

Forma geral

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

- A última linha costuma permanecer $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$
- Em translações, os deslocamentos aparecem na **quarta coluna**
- Em composições, a ordem importa: a operação mais à direita acontece primeiro

Lembrete

Não basta conhecer a fórmula da matriz. Também é preciso saber **quando** usá-la e **em que ordem** multiplicá-la.

Translação 3D – equações

Definição

Transladar um objeto significa somar um deslocamento em cada direção cartesiana:

$$x' = x + t_x \quad y' = y + t_y \quad z' = z + t_z$$

- t_x , t_y e t_z podem ser positivos, negativos ou nulos
- Se os três forem zero, nada muda
- A translação altera a **posição**, mas não altera tamanho nem orientação

Intuição

Todo vértice do objeto recebe o **mesmo deslocamento**. Por isso o objeto anda inteiro pelo espaço.

Matriz de translação 3D

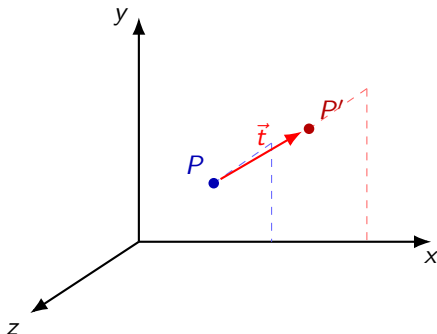
$$\mathbf{T}(t_x, t_y, t_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}(t_x, t_y, t_z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ z + t_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Leitura da matriz

- A submatriz 3×3 superior esquerda é a identidade
- A quarta coluna armazena os três deslocamentos
- A última linha preserva a coordenada homogênea

Visualização da translação



- O ponto sai de P e vai para P'
- O vetor de deslocamento é o mesmo para todos os vértices
- O formato do objeto não muda

Cuidado

Trocar a ordem em uma composição pode produzir outro resultado. A translação só faz exatamente o esperado quando a ordem da multiplicação está correta.

Translação inversa

Como desfazer uma translação

Para inverter uma translação, basta trocar o sinal dos deslocamentos:

$$\mathbf{T}^{-1}(t_x, t_y, t_z) = \mathbf{T}(-t_x, -t_y, -t_z)$$

- Se você translada e depois aplica a translação inversa, o objeto volta para a posição original
- Essa ideia será útil logo adiante, quando precisarmos levar um ponto fixo para a origem e depois trazê-lo de volta

Exemplo rápido

Mover por $(2, -1, 3)$ e depois por $(-2, 1, -3)$ faz as duas operações se anularem.

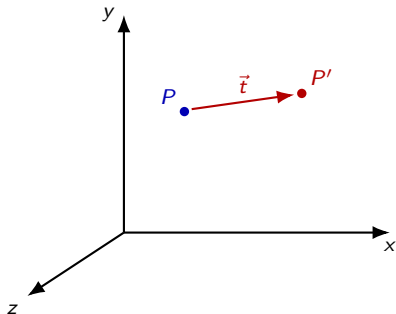
Exemplo numérico – Translação

Transladar $P = (1, 2, 0, 1)$ por $\mathbf{T}(3, 1, 2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2+1 \\ 0+2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resultado

$P' = (4, 3, 2)$. Cada coordenada somou o deslocamento correspondente.



Escala 3D – ideia básica

Equações

$$x' = s_x x \quad y' = s_y y \quad z' = s_z z$$

- s_x , s_y e s_z são os fatores de escala nas três direções
- Se $s_x = s_y = s_z$, temos uma **escala uniforme**
- Se os fatores são diferentes, temos uma **escala não uniforme**

Interpretação

Escala altera o tamanho do objeto. Dependendo do fator, também pode aproximar ou afastar o objeto da origem.

Matriz de escala 3D

$$\mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x x \\ s_y y \\ s_z z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Fatores maiores que 1 aumentam o objeto naquela direção
- Fatores entre 0 e 1 diminuem o objeto
- Sem ponto fixo explícito, a referência padrão é a **origem**

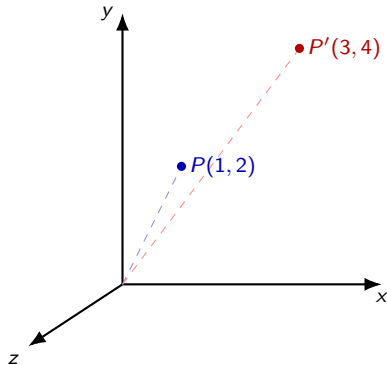
Exemplo numérico – Escala

Aplicar $\mathbf{S}(3, 2, 1)$ a $P = (1, 2, 0, 1)$:

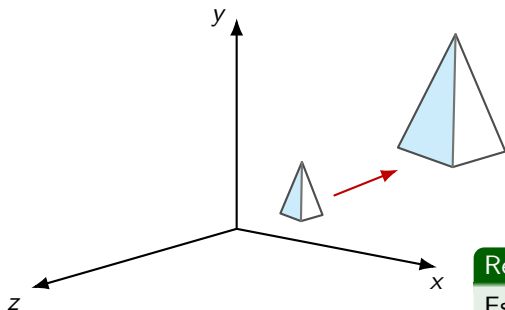
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resultado

$P' = (3, 4, 0)$. x triplicou, y dobrou. A distância à origem também aumentou.



Efeito visual da escala em relação à origem



- Uma escala uniforme com fator 2 dobra as dimensões do objeto
- Mas também dobra a distância do ponto em relação à origem
- Por isso, escala sem ponto fixo pode dar a impressão de que o objeto "escorregou"

Regra prática

Escalar em torno da origem é simples. Escalar mantendo uma âncora exige composição de matrizes.

Escala 3D com ponto fixo

Problema

Se queremos aumentar ou diminuir o objeto sem deslocar um ponto específico, precisamos escolher um **ponto fixo** $F = (x_f, y_f, z_f)$.

- 1 Transladar o ponto fixo para a origem: $\mathbf{T}(-x_f, -y_f, -z_f)$
- 2 Aplicar a escala desejada: $\mathbf{S}(s_x, s_y, s_z)$
- 3 Transladar de volta: $\mathbf{T}(x_f, y_f, z_f)$

Matriz composta

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(x_f, y_f, z_f) \mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) \mathbf{T}(-x_f, -y_f, -z_f)$$

Escala 3D com ponto fixo – matriz completa

$$\mathbf{P}' = \mathbf{T}(x_f, y_f, z_f) \mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) \mathbf{T}(-x_f, -y_f, -z_f) \mathbf{P}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & 0 & y_f \\ 0 & 0 & 1 & z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & 0 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 & -z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Escala inversa

Como desfazer uma escala

Se nenhum fator for zero, a escala inversa é obtida pelos recíprocos:

$$\mathbf{S}^{-1}(s_x, s_y, s_z) = \mathbf{S} \left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}, \frac{1}{s_z} \right)$$

- Se a escala original é $(2, 2, 2)$, a inversa é $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- Se a escala original é $(0.5, 0.5, 0.5)$, a inversa é $(2, 2, 2)$

Cuidado

Fator zero "amassa" o objeto naquela direção e perde informação. Nesse caso não existe inversa.

Por que rotação 3D é mais delicada?

Diferença principal

Em 2D rotacionamos em torno de um **ponto**. Em 3D rotacionamos em torno de um **eixo**.

- Caso 1: o eixo de rotação coincide com um dos eixos cartesianos (x , y ou z)
- Caso 2: o eixo de rotação é paralelo a um dos eixos cartesianos
- Caso 3: o eixo de rotação é arbitrário

Recorte da disciplina

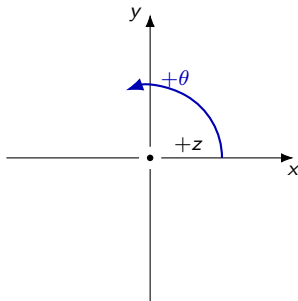
Nesta parte veremos o caso mais simples: rotações em torno dos eixos cartesianos. Isso já cobre a intuição principal e a base matricial.

Convenção de sinal e regra da mão direita

- Ângulos positivos seguem a **regra da mão direita**
- Uma forma prática de lembrar: olhe a partir da parte positiva do eixo em direção à origem
- Nessa visão, uma rotação positiva aparece no sentido **anti-horário**

Consequência

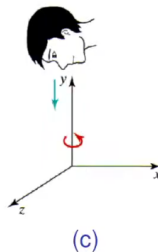
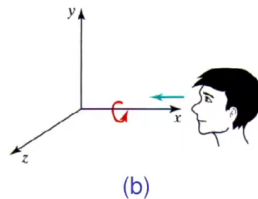
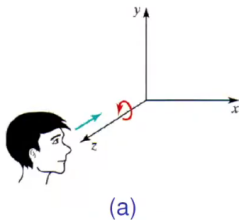
Mudar o sinal do ângulo inverte o sentido da rotação.



Vista de frente do plano xy , com $+z$ saindo da tela.

Rotações positivas vistas a partir do eixo

Rotações positivas sobre um eixo de coordenadas são anti-horárias quando olhamos a partir da parte positiva em direção à origem.



Rotação em torno do eixo z

Equações

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$z' = z$$

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Esta é a rotação mais parecida com a de 2D
- O plano que gira é o plano xy
- A coordenada z permanece fixa

Exemplo numérico – Rotação em torno de z

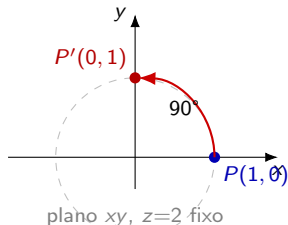
Rotacionar $P = (1, 0, 2, 1)$ em torno de z por 90° :

Com $\cos 90^\circ = 0$ e $\sin 90^\circ = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resultado

$P' = (0, 1, 2)$. $z = 2$ permaneceu fixo; o ponto girou no plano xy.



Efeito visual da rotação em torno de z

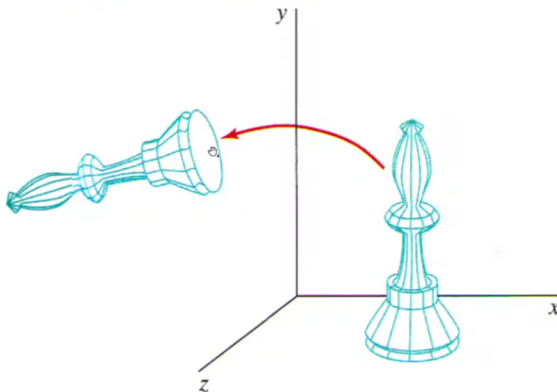


Figura: Rotação de um objeto em torno do eixo z .

Rotação de um objeto em torno do eixo z .

Rotação em torno do eixo x

Rotação em torno de x

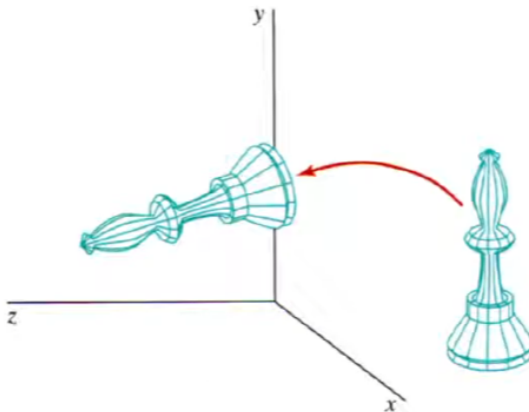
$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aqui a coordenada x não muda.

Equações

$$x' = x, \quad y' = y \cos \theta - z \sin \theta, \quad z' = y \sin \theta + z \cos \theta$$

Efeito visual da rotação em torno de x



Rotação de um objeto em torno do eixo x .

Rotação em torno do eixo y

Rotação em torno de y

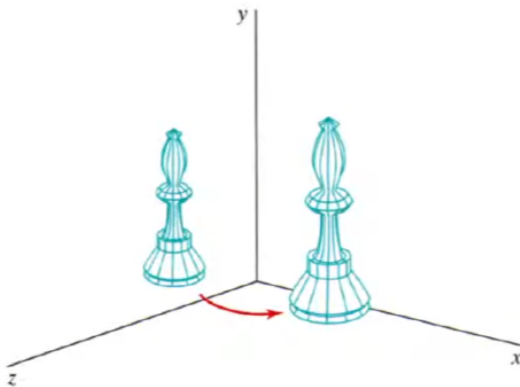
$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aqui a coordenada y não muda.

Equações

$$x' = x \cos \theta + z \sin \theta, \quad y' = y, \quad z' = -x \sin \theta + z \cos \theta$$

Efeito visual da rotação em torno de y



Rotação de um objeto em torno do eixo y .

Leitura rápida das matrizes de rotação

- Em toda rotação, a coordenada associada ao eixo de rotação permanece inalterada
- A parte que gira aparece como uma submatriz 2×2 com cossenos na diagonal principal
- Os termos com seno definem o sentido da rotação

Padrão para memorizar

- Rotação em torno de z : gira o plano xy
- Rotação em torno de x : gira o plano yz
- Rotação em torno de y : gira o plano xz

Teste mental útil

Se você aplicar $\mathbf{R}_x(\theta)$ e a coordenada x mudar, há algum erro na conta.

Exemplo numérico – dados do problema

Desejamos rotacionar o ponto

$$P = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

em torno do eixo x por 60° .

Sabendo que

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Matriz usada

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo numérico – resultado

$$\mathbf{R}_x(60^\circ) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \left(\frac{1}{2}\right) - 7 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 7 \left(\frac{1}{2}\right) \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 \\ -4.56 \\ 6.10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cheque de consistência

A coordenada x continuou igual a 4, como deve acontecer em uma rotação em torno do eixo x .

Rotação inversa

Como desfazer uma rotação

A inversa de uma rotação é obtida trocando θ por $-\theta$:

$$\mathbf{R}_x^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_x(-\theta), \quad \mathbf{R}_y^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_y(-\theta), \quad \mathbf{R}_z^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_z(-\theta)$$

- O cosseno permanece o mesmo, mas o seno muda de sinal
- Para matrizes de rotação ortogonais, a inversa coincide com a transposta

Interpretação

Rotacionar por $+30^\circ$ e depois por -30° devolve o objeto à orientação original.

Exemplo conceitual em three.js

```
1  const geometry = new THREE.BoxGeometry(1, 1, 1);
2  const material = new THREE.MeshNormalMaterial();
3  const cube = new THREE.Mesh(geometry, material);
4
5  cube.position.set(2, 1, -3); // Desloca o cubo
6  cube.scale.set(1.5, 1.0, 0.75); // Escala por eixo
7  cube.rotation.x = THREE.MathUtils.degToRad(60);
8
9  scene.add(cube);
```

- position controla a translação do objeto
- scale define fatores independentes em x, y e z
- rotation.x aplica rotação em torno do eixo x

Observação

Mesmo quando a biblioteca esconde a matriz final, a ideia matemática por trás continua sendo composição de transformações 3D.

Resumo da aula

- Em 3D passamos a usar pontos em coordenadas homogêneas 4×1
- Translações, escalas e rotações são representadas por matrizes 4×4
- Translação altera posição; escala altera tamanho; rotação altera orientação
- Em rotações sobre eixos cartesianos, uma coordenada fica fixa e as outras duas giram
- Escala com ponto fixo exige composição: translada, escala e translada de volta

Próxima etapa

Na continuidade do assunto veremos como lidar com eixos de rotação paralelos aos eixos cartesianos e como essas ideias se conectam com sistemas de coordenadas e viewing 3D.

Aula interativa

Perguntas e respostas

Pergunta 1

Pense!

Por que um ponto 3D passa a ser representado por um vetor coluna com **quatro** elementos e não apenas três?

Discuta com a turma por um minuto.

Resposta 1

Resposta

Porque em coordenadas homogêneas precisamos de uma quarta componente para distinguir **pontos** de **vetores** e para representar translações por multiplicação de matrizes. Pontos terminam com 1 e vetores terminam com 0.

Pergunta 2

Pense!

Em uma matriz de translação 3D, onde aparecem os deslocamentos t_x , t_y e t_z ?

Resposta 2

Resposta

Eles aparecem na **quarta coluna** da matriz. A submatriz 3×3 superior esquerda permanece como identidade.

Pergunta 3

Pense!

Qual é a diferença entre escala uniforme e escala não uniforme?

Resposta 3

Resposta

Na escala uniforme todos os fatores são iguais: $s_x = s_y = s_z$. Na escala não uniforme pelo menos um fator é diferente, então o objeto pode ser esticado mais em uma direção do que em outra.

Pergunta 4

Pense!

Por que a escala em torno da origem pode mudar a posição aparente do objeto?

Resposta 4

Resposta

Porque cada coordenada é multiplicada pelo fator de escala. Assim, além de mudar o tamanho, a distância dos pontos em relação à origem também muda.

Pergunta 5

Pense!

Numa rotação em torno do eixo y , qual coordenada permanece inalterada?

Resposta 5

Resposta

A coordenada y permanece fixa. As coordenadas que giram são x e z .

Pergunta 6

Pense!

Como desfazemos uma rotação de ângulo θ ?

Resposta 6

Resposta

Basta aplicar a rotação de ângulo $-\theta$. Em outras palavras, a inversa de uma rotação é a mesma matriz com o seno trocado de sinal.

Pergunta 7

Pense!

Qual é P' ao transladar $P = (2, 0, -1, 1)$ por $\mathbf{T}(1, 3, 4)$?

Aplique a matriz de translação ao ponto.

Resposta 7

Resposta

$$P' = \begin{pmatrix} 2 + 1 \\ 0 + 3 \\ -1 + 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$P' = (3, 3, 3)$. Cada coordenada recebeu o seu deslocamento; a coordenada homogênea permanece 1.

Pergunta 8

Pense!

Aplique $\mathbf{S}(3, 2, 2)$ ao ponto $P = (2, 3, 1, 1)$. Qual é P' ?

Resposta 8

Resposta

$$P' = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$P' = (6, 6, 2)$. Note que o eixo z foi comprimido à metade em relação a x e y .

Pergunta 9

Pense!

Aplique $\mathbf{R}_z(90^\circ)$ a $P = (0, 1, 3, 1)$, usando $\cos 90^\circ = 0$ e $\sin 90^\circ = 1$. Qual é P' ?

Resposta 9

Resposta

$$x' = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1, \quad y' = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0, \quad z' = 3$$

$$P' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$z = 3$ ficou fixo. O ponto girou de $(0, 1)$ para $(-1, 0)$ no plano xy .

Pergunta 10

Pense!

Sabendo que $\mathbf{S}(2, 2, 2) \cdot P = P' = (6, 4, 2, 1)$, qual era o ponto original P ?

Use a escala inversa.

Resposta 10

Resposta

Aplicando $\mathbf{S}^{-1}(2, 2, 2) = \mathbf{S}(0.5, 0.5, 0.5)$:

$$P = \begin{pmatrix} 6/2 \\ 4/2 \\ 2/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$P = (3, 2, 1)$. Para desfazer uma escala, divide-se cada coordenada pelo fator correspondente.