

Transformações Geométricas Bidimensionais

Pedro Ximenes

Universidade Católica de Pernambuco (UNICAP)

9 de março de 2026

Sumário

- 1 Introdução
 - O que são Transformações Geométricas?
- 2 Transformações Básicas
 - Translação
 - Rotação
 - Escala
- 3 Coordenadas Homogêneas
 - Motivação
 - Definição e Uso
 - Vantagem das Coordenadas Homogêneas
- 4 Material Complementar

Transformações Geométricas – Visão Geral

Definição

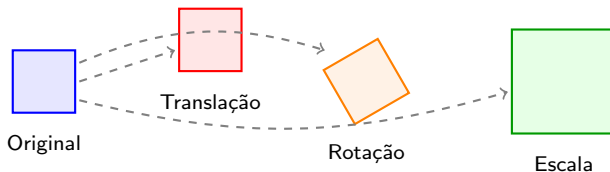
Transformações geométricas são **operações matemáticas** aplicadas à descrição geométrica de um objeto para **alterar** sua posição, orientação ou tamanho.

- **Translação** – muda a **posição** do objeto
- **Rotação** – muda a **orientação** do objeto
- **Escala** – muda o **tamanho** do objeto

Outras transformações (próximas aulas)

Reflexão e Cisalhamento – não serão abordados nesta aula.

Transformações Geométricas – Ilustração



Aplicações

- Animação de objetos em jogos e simulações
- Posicionamento de modelos em cenas 3D
- Manipulação interativa de objetos (arrastar, girar, redimensionar)

Translação – Equações

A translação consiste em **adicionar distâncias fixas** às coordenadas de cada ponto do objeto.

Equações de Translação

Dado um ponto (x, y) e os **fatores de translação** t_x e t_y :

$$x' = x + t_x \quad y' = y + t_y$$

- t_x – deslocamento na direção x (horizontal)
- t_y – deslocamento na direção y (vertical)
- (x', y') – coordenadas do ponto **depois** da translação (“ x linha” e “ y linha”)

Observação

A mesma translação (t_x, t_y) é aplicada a **todos** os vértices do objeto.

Translação – Notação Matricial

Para facilitar cálculos futuros, escrevemos a translação usando **matrizes**:

Forma Matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

Ou seja: **Ponto transladado** = **Ponto original** + **Vetor de translação**

Importante

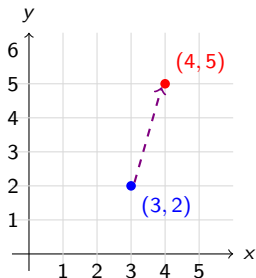
- A translação é uma **soma** de duas matrizes (vetores coluna).
- Parâmetros: t_x e t_y (podem ser positivos ou negativos).
- Se $t_x = 0$ e $t_y = 0$, o objeto **não se move**.

Translação – Exemplo Numérico

Problema: Transladar o ponto $(3, 2)$ com $t_x = 1$ e $t_y = 3$.

Cálculo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$



- Na direção x : deslocou 1 unidade ($3 \rightarrow 4$)
- Na direção y : deslocou 3 unidades ($2 \rightarrow 5$)
- Valores negativos de t_x ou t_y movem na direção oposta

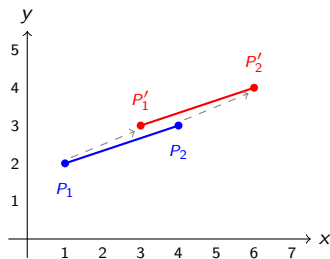
Translação – Aplicando a Objetos

Para transladar um objeto inteiro (ex: uma linha), aplique a **mesma translação a cada vértice**:

Exemplo – Translação de uma linha

Uma linha definida por $P_1 = (1, 2)$ e $P_2 = (4, 3)$ com $t_x = 2$, $t_y = 1$:

$$P'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad P'_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$



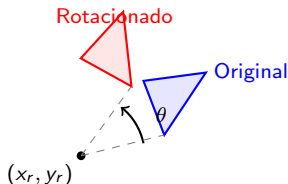
Se fosse um quadrado (4 vértices), triângulo (3 vértices), etc., o mesmo processo se repete para cada vértice.

Rotação – Conceitos Básicos

A rotação em 2D é definida por dois parâmetros:

Parâmetros da Rotação

- **Ponto de rotação** (x_r, y_r) – o ponto fixo ao redor do qual o objeto gira
- **Ângulo de rotação** θ – quanto o objeto gira (em graus)



- Imagine um **prego** no ponto de rotação e um **barbante** esticado até o vértice
- Ao girar, o barbante mantém seu comprimento constante (raio r)
- O mesmo processo é aplicado a todos os vértices

Convenção de sinal

$\theta > 0$: rotação no sentido **anti-horário**. $\theta < 0$: rotação no sentido **horário**.

Rotação – Dedução (Parte 1)

Para simplificar, consideramos o **ponto de rotação na origem** ($x_r = 0$, $y_r = 0$).

Usando **coordenadas polares**, o ponto original (x, y) pode ser escrito como:

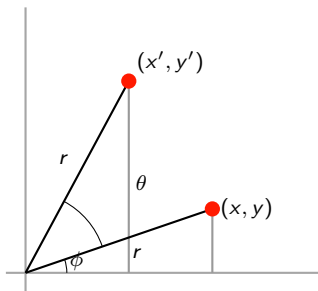
$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi$$

onde r é a distância do ponto à origem e ϕ é o ângulo original em relação ao eixo x .

Após a rotação por θ , o novo ponto fica:

$$x' = r \cos(\phi + \theta) \quad y' = r \sin(\phi + \theta)$$

O raio r é **constante** (não muda).



Rotação - Dedução (Coordenadas Polares)

- Considere o triângulo retângulo formado pelo ponto (x, y)

$$\cos \phi = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r}$$

$$x = r \cos \phi$$

- Da mesma forma

$$\sin \phi = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r}$$

$$y = r \sin \phi$$

Conclusão

$$(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$$

Rotação – Dedução (Parte 2): Identidades Trigonométricas

Agora precisamos nos livrar de ϕ e r . Para isso, usamos as **identidades trigonométricas** de soma de ângulos:

Identidades de soma de ângulos (do ensino médio)

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta$$

Aplicando as identidades em x' e y' :

$$x' = r \cos(\phi + \theta) = r \cos \phi \cos \theta - r \sin \phi \sin \theta$$

$$y' = r \sin(\phi + \theta) = r \cos \phi \sin \theta + r \sin \phi \cos \theta$$

Agora, lembrando que $x = r \cos \phi$ e $y = r \sin \phi$, **substituímos**:

Equações finais da Rotação

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta \quad y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

Rotação – Forma Matricial (2×2)

Transformando as equações de rotação em **notação matricial**:

Matriz de Rotação (2×2)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- A diagonal principal contém $\cos \theta$
- A diagonal secundária contém $\sin \theta$, com sinal **negativo na primeira linha**
- A rotação é uma **multiplicação** de matrizes (diferente da translação que era soma!)

Cuidado!

- A multiplicação de matrizes **NÃO é comutativa**: $A \times B \neq B \times A$
- Não troque a ordem das matrizes!
- Esta matriz só vale quando o ponto de rotação está na **origem** (0,0)

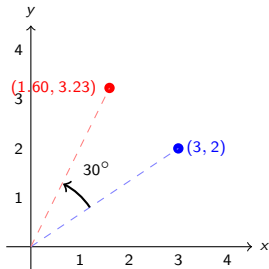
Rotação – Exemplo Numérico

Problema: Rotacionar o ponto $(3, 2)$ por $\theta = 30^\circ$ ao redor da origem.

Lembrando: $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$ e $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0,5$

Cálculo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0,866 - 2 \cdot 0,5 \\ 3 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,866 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,60 \\ 3,23 \end{pmatrix}$$



Observações

- O ponto se moveu no sentido anti-horário (pois $\theta > 0$)
- A distância à origem permaneceu constante
- Em provas: **podem usar calculadora!**
Configure para graus

Rotação – Ponto de Rotação Arbitrário

Limitação atual

A matriz de rotação que aprendemos só funciona quando o ponto de rotação está na **origem** $(0, 0)$.

- E se quisermos rotacionar ao redor de um **ponto qualquer** (x_r, y_r) ?
- Seria possível deduzir uma fórmula para isso, mas seria trabalhoso.
- Existe uma forma **mais fácil** de resolver esse problema!

Solução (mais adiante)

Usando **coordenadas homogêneas** e **sequências de transformações**, que veremos nas próximas aulas, poderemos compor uma translação + rotação + translação para obter a rotação ao redor de qualquer ponto.

Transformações de Corpo Rígido

Definição

Translação e **Rotação** juntas formam as chamadas **transformações de corpo rígido**.

Isso significa que elas:

- **Não deformam** o objeto
- **Preservam** os ângulos internos do objeto
- **Preservam** as distâncias entre os vértices
- Apenas mudam a **posição** (translação) e a **orientação** (rotação)

E a escala?

A escala **não** é uma transformação de corpo rígido, pois ela **altera o tamanho** do objeto. Vamos aprendê-la a seguir.

Escala – Equações e Parâmetros

A escala altera o **tamanho** do objeto, multiplicando as coordenadas por fatores de escala.

Equações de Escala

$$x' = s_x \cdot x \quad y' = s_y \cdot y$$

- s_x – fator de escala na direção x
- s_y – fator de escala na direção y

Forma Matricial (2×2)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Fatores de escala ficam na **diagonal principal**, com zeros nas demais posições.

Escala – Regras dos Fatores

Restrições dos fatores s_x e s_y

- Devem ser **positivos** (> 0) e **diferentes de zero**
- Valores negativos geram outra transformação (reflexão – próximas aulas)

Efeito dos valores

- $s > 1 \Rightarrow$ **umenta** o objeto
- $0 < s < 1 \Rightarrow$ **diminui** o objeto
- $s = 1 \Rightarrow$ **não altera** naquela direção

Tipos de escala

- **Uniforme:** $s_x = s_y$
(mantém proporções)
- **Diferencial:** $s_x \neq s_y$
(alonga/achata o objeto)

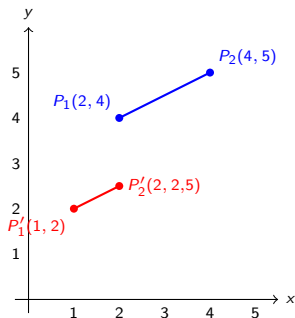
Exemplos: $s_x = s_y = 2 \Rightarrow$ duplica o tamanho; $s_x = s_y = 0,5 \Rightarrow$ metade do tamanho; $s_x = 2, s_y = 3 \Rightarrow$ escala diferencial.

Escala – Exemplo Numérico

Problema: Escalar a reta definida por $P_1 = (2, 4)$ e $P_2 = (4, 5)$ com $s_x = 0,5$ e $s_y = 0,5$.

Cálculos

$$P'_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P'_2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$



Efeito colateral!

A escala **diminuiu** a linha pela metade, mas **também mudou sua posição!**

Isso acontece porque a escala é feita em relação à **origem**. O objeto é escalado e movido simultaneamente.

Escala – Ponto Fixo

Problema da escala básica

Assim como na rotação, a escala que aprendemos tem a origem como referência. Ao escalar, o objeto **muda de tamanho E de posição**.

- Muitas vezes queremos escalar o objeto **sem movê-lo** (escala com ponto fixo)
- É possível deduzir uma fórmula direta, mas...

Solução (mais adiante)

Assim como a rotação em torno de ponto arbitrário, a **escala com ponto fixo** será resolvida de forma mais fácil usando **coordenadas homogêneas** e **composição de transformações** (próximas aulas).

Por que Coordenadas Homogêneas?

Vimos que as três transformações básicas podem ser escritas como:

$$P' = M_1 \cdot P + M_2$$

M_1 (Matriz 2×2)

Contém os fatores **multiplicativos**:

- Rotação
- Escala

M_2 (Vetor coluna)

Contém os termos de **translação**:

- t_x e t_y

O problema

- A translação usa **adição**, enquanto rotação e escala usam **multiplicação**
- Quando precisamos fazer **sequências** de transformações (3, 4, 5 seguidas), ficar trocando entre soma e multiplicação é complicado!
- Gostaríamos de representar **tudo como multiplicação de matrizes**

Coordenadas Homogêneas – Definição

Ideia Central

Expandimos as matrizes de 2×2 para 3×3 , adicionando uma **terceira coordenada** chamada de **parâmetro homogêneo** h .

Um ponto 2D em coordenadas homogêneas é representado por **três valores**:

$$(x_h, y_h, h)$$

Regras

- h pode ser qualquer valor $\neq 0$, mas por conveniência escolhemos $h = 1$
- Com $h = 1$: as coordenadas homogêneas ficam simplesmente $(x, y, 1)$
- A projeção para o sistema cartesiano: $x = x_h/h$, $y = y_h/h$

Exemplos: O ponto $(2, 3)$ em coordenadas homogêneas fica $(2, 3, 1)$. O ponto $(4, 5)$ fica $(4, 5, 1)$.

Translação em Coordenadas Homogêneas

- A translação no espaço homogêneo é dada por:

$$x'_h = 1 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + t_x \cdot h$$

$$y'_h = 0 \cdot x_h + 1 \cdot y_h + t_y \cdot h$$

$$h' = 0 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + 1 \cdot h$$

Coord. cartesianas

$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$

Translação em Coordenadas Homogêneas

Com coordenadas homogêneas, a translação **vira uma multiplicação de matrizes!**

Matriz de Translação (3×3)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T(t_x, t_y)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Por conveniência, $h = 1$
- Os fatores t_x e t_y ficam na **terceira coluna**
- O resto é como uma “identidade”: 1 na diagonal, 0 nas demais
- **Verificação:** se multiplicarmos, obtemos $x' = x + t_x$, $y' = y + t_y$, $1 = 1$ ✓

Rotação em Coordenadas Homogêneas

Matriz de Rotação (3×3)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R(\theta)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Por conveniência, $h = 1$
- A **terceira coluna** é $(0, 0, 1)^T$ (não há translação)
- A sub-matriz 2×2 no **canto superior esquerdo** é a mesma matriz de rotação que aprendemos antes
- $\theta > 0$: anti-horário $\theta < 0$: horário
- Ponto de rotação na **origem**

Escala em Coordenadas Homogêneas

Matriz de Escala (3×3)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S(s_x, s_y)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Por conveniência, $h = 1$
- A **terceira coluna** é $(0, 0, 1)^T$ (sem translação)
- Fatores de escala s_x e s_y na **diagonal principal**
- Lembrar: $s_x, s_y > 0$ e $\neq 0$

Ordem das matrizes – vale para todas!

Se trocar a ordem das matrizes, **nem sempre é possível multiplicar** e, quando é, o resultado pode ser diferente. A ordem importa!

Resumo – As Três Matrizes em Coordenadas Homogêneas

Translação $T(t_x, t_y)$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Parâmetros: } t_x, t_y \text{ (podem ser negativos)}$$

Rotação $R(\theta)$ (ponto de rotação na origem)

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Parâmetro: } \theta \text{ (graus; + anti-horário)}$$

Escala $S(s_x, s_y)$

$$S = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Parâmetros: } s_x, s_y > 0$$

Todas as matrizes: última linha = $(0 \ 0 \ 1)$ e ponto = $(x, y, 1)^T$

Vantagem: Sequências de Transformações como Multiplicações

A grande vantagem

Agora **todas** as transformações (incluindo a translação!) são representadas por **multiplicações de matrizes 3×3** .

Isso permite:

- Compor **várias transformações** em uma **única matriz**
- Aplicar sequências de transformações de forma eficiente
- Resolver problemas como:
 - Rotação ao redor de um ponto arbitrário
 - Escala com ponto fixo

Próximas aulas

Veremos como **compor** (multiplicar) essas matrizes para criar transformações complexas!

Ferramentas e Materiais Complementares

Dicas de estudo

- Se teve dificuldade com **seno e cosseno**, revise trigonometria básica
- Se teve dificuldade com **coordenadas polares**, consulte as suas anotações de algebra linear ou geometria analítica
- **Pratique** a multiplicação de matrizes: é uma habilidade essencial!

Referências



Angel, E.; Shreiner, D. *Interactive Computer Graphics: A Top-Down Approach with WebGL*. 8th edition. Capítulo 5.



Mount, D. *CMSC 427 – Computer Graphics Lecture Notes*. University of Maryland. Aula 8.



Material de Introdução à Computação Gráfica – IME-USP. Disponível em: <https://panda.ime.usp.br/introcg/static/introcg>